

**Prezentare stiintifica a proiectului**  
**APLICATII ALE UNOR CLASE SPECIALE DE INEGALITATI**  
**VARIATIONALE SI PROBLEME DE ECHILIBRU IN FINANTE SI**  
**NANOINDENTARE,**

**Program PN II IDEI, cod ID, nr. 112/01.10.2007**  
**Director : Prof. Dr. Vasile Preda**

Teoria inegalitatilor variationale isi are originea in lucrarile lui Stampacchia si Fichera, aparute la inceputul anilor 1960, ale primului motivate de teoria potentialului, ale celui de-al doilea de mecanica. In acest caz cea mai importanta teorema de existenta a fost stabilita in 1966 de Hartman si Stampacchia.

Inegalitatile variationale au fost definite pentru prima data pe spatii finit dimensionale de Lions si Stampacchia (1966) care au stabilit si primele rezultate importante de existenta. Mentionam ca Stampacchia (1964) a dat prima teorema de existenta in cazul spatiilor infinit dimensionale. La putin timp Lions si Stampacchia (1965, 1967) si Browder (1966) au aratat ca ipotezele teoremei de existenta pot fi slabite.

Notiunea de inegalitate vectoriala a fost introdusa de Gianessi (1980). Mai tarziu, Chen si Cheng (1988) au definit acest concept pentru spatii infinit dimensionale. Acest rezultat si cel stabilit de Chen si Craven (1990) au constituit inceputul unei lungi serii de articole pe aceasta tema: Chen (JOTA, 1992), Yang (Nonlinear Analysis, 1993, JOTA, 1993; 1997), Lee (Progress in Optimization, 2000).

In ceea ce priveste problemele de echilibru, varianta scalara a fost introdusa de Blum si Oettli pe spatii Hausdorff (1994), apoi pe spatii Hilbert de Noor si Oettli (1994). Cazul vectorial este considerat pentru prima data de Ansari, Oettli si Schlager, de asemenea intai pe spatii Hausdorff (1996), apoi pe un con convex dintr-un spatiu Hilbert (1997).

De aici observam doua directii principale de cercetare: rezultate de existenta a solutiei si metode de rezolvare. In demonstrarea rezultatelor de existenta, pentru problemele scalare generalizate, se foloseste teorema Knaster – Kuratowski – Mazurkiewicz sau diferite extinderi ale acesteia, iar pentru cele vectoriale, teoreme de tip Ky Fan – Browder.

Pentru rezolvarea acestor tipuri probleme au fost folosite diferite metode numerice incluzand metoda proiectiei si variante ale acesteia, ecuatiile Wiener – Hopf, tehnica principiului auxiliar, tehnica descompunerii. Ideea de baza in metoda proiectiei este de a stabili, folosind notiunea de proiectie, o problema de punct fix echivalenta cu inegalitatea variationala (sau problema de echilibru) ce trebuie rezolvata. Pentru convergenta acestui tip de algoritmi sunt necesare ipoteze de monotonie si continuitate Lipschitz, ceea ce determina imposibilitatea aplicarii lui in numeroase cazuri. Acest motiv a dus la modificarea metodei proiectiei si la aparitia altor metode de rezolvare, cum ar fi metode de tip gradient, metode de tip predictie – corectie, metoda extragradient, de exemplu: He, Liao (2002), Khebatov (1997), Giannessi, Maugieri, Pardalos (2001), He (1997), Noor (2003), Noor, El Said (2002), Uko (1998).

O alta tehnica de rezolvare este cautarea unei ecuatii Wiener-Hopf echivalente. Aceasta echivalenta a fost studiata pentru prima data de Shi (Proc. AMS 1991) si

Robinson (Math. Oper. Research, 1992) iar ca pas al unui algoritm a fost utilizata prima oara de Sun (Math. Numer. Sinica 1994). Mentionam ca Noor, Wang, Xiu, Noor si Rasiyas (JMAA, 2002) au analizat o metoda de predictie-corectie care implica ecuatii Wiener-Hopf modificate si au demonstrat ca aceasta metoda este eficienta si robusta.

Dar tehnica proiectiei si a ecuatiilor Wiener – Hopf nu pot fi utilizate pentru anumite clase de inegalitati variationale sau probleme de echilibru, care implica functii neliniare nediferentiabile, motiv pentru care a fost introdusa tehnica principiului auxiliar. Aceasta tehnica consta in gasirea principiului variational auxiliar si in demonstrarea faptului ca solutia problemei auxiliare este solutia problemei initiale. Glowinski si altii au folosit aceasta tehnica in studiul existentei solutiilor pentru inegalitati variationale mixte. A. M. Noor a folosit-o pentru a sugera anumite metode de tip predictor – corector. Se stie ca un numar important de metode numerice poate fi obtinut ca si cazuri particulare din aceasta tehnica. Aceasta tehnica poate fi folosita pentru a sugera si analiza anumite metode explicite de tip predictor – corector pentru inegalitati variationale generale.

O alta directie importanta de studiu este legatura cu optimizarea matematica. Inegalitatile vectoriale in limbaj de eficienta Pareto au fost considerate de Lee, Kim, Lee (1996). Acesti cercetatori impreuna cu Yen s-au ocupat in 1998 de legatura intre teoria inegalitatilor variationale si optimizarea matematica, unul dintre rezultatele importante, in acest sens, fiind exprimarea conditiilor necesare de eficienta slaba pentru anumite probleme de optimizare vectoriala, implicand functii diferentiabile sub forma unor inegalitati variationale. Aceasta lucrare sugereaza multe moduri de utilizare a teoremelor de existenta pentru inegalitati variationale scalare in studiul problemelor de optimizare vectoriala. Alte lucrari de referinta in domeniu, in acest sens: Yang (JOTA, 1997), Giannessi (New Trends in Mathematical Programming, 1998), Ward, Lee (JOTA, 2002). Diferite metode de scalarizare au fost folosite in studiul inegalitatilor variationale, de exemplu: Sawanagi, Nakayama, Tamino (Academic Press, 1985), Luc (Springer, 1989), Goh, Yang (Kluwer Academic Publishers, 2000), Chen (JMAA, 2001).

Dintre rezultatele importante privind utilizarea inegalitatilor variationale sau problemelor de echilibru in probleme concrete enumeram aplicatiile in :

#### **- Matematici financiare:**

- *American Option* (Jaillet, Lamberton, Lapeyre, 1990- pentru cazul cand inegalitatea variationala implica operatori local integro diferentiali; X. L. Zhang , 1997, 2005, altfel);
- *European Option* (Amin,1993) si descompunerea American Option in sume de European Options (Pham, 1996);
- Probleme de minimizare a riscului (Follmer, Schweizer, 1990; Pham, Touzi, 1994);
- Abordarea optiunilor pe piata portofoliilor prin probleme de echilibru (Naik, Lee, 2000; Pham, 2005);

#### **- Probleme de trafic :**

- Studiul problemelor de trafic cu un singur criteriu de echilibru (Florian, 1986; Nagurney,1993);
- Extensii ale notiunii de echilibru Wardrop in cazul vectorial (Chen, Yen, 1993; Yang, Goh, 1997,1999; Giannessi, 2000);

- Algoritmi pentru rezolvarea problemelor de trafic formulate via inegalitati variationale si probleme de programare semiliniara (M. Patriksson, 1993,2000);
- Abordarea problemelor de trafic cu ajutorul diferitor clase de inegalitati quasivariationale (Khan, Luu, 2004, 2005, 2006).

**- Mecanica:**

- Problema obstacolului (Siddiqi, 1997- problema unei membrane elastice stand peste un obstacol; Chen, Nochetto, 2000; Vesser, 2001 – problema eliptica);
- Elasticitate si vascoelasticitate (Kikuchi, Oden, 1998)
- Plasticitate si vasco-plasticitate (Han, Sofonea, 2002)
- Elastoplasticitate (Han, Reddy, 1995,1997);
- Fluide newtoniene (Siddiqi, Neunzert, 1994,2001; Corillo, Chipot,2003; Chipot, Lyaghfour,1997)
- Metoda elementului finit (Blum, Stuetzle, 2000- discretizare pentru problema lui Signorini; Bostan, Han, Reddy, 2005).

- **Teoria jocurilor:** Echilibru Nash (S. Park,2000); Functii *gap* (Yang, Goh,1997); Inegalitati minimax (Park,Bae, Kang,1994).

- **Sisteme dinamice** (Zhang, Nagurney, 1995).

- **Probleme de complementaritate** (Jiang, Le, 1997; S. Park, 2001).

- **Aplicatii pe spatii de probabilitati** (Preda, Beldiman, Batatorescu, 2007).

- **Aplicatii pe spatii de distributii** (Chen, 1996; Beldiman,2006).

Este bine cunoscut faptul ca multe probleme finante, economie, transporturi si mecanica pot fi studiate utilizand inegalitati variationale sau probleme de echilibru. Dezvoltarea in continuare de modele din ce in ce mai complexe si mai sensibile a devenit o conditie indispensabila pentru progresul in orice domeniu stiintific. Directiile de cercetare ce vor fi dezvoltate in prezentul proiect vizeaza modelarea unor fenomene din mecanica (in special cel al nanoindentarii) si economie (in special problema portofoliilor in matematicile financiare) cu ajutorul unor inegalitati variationale si probleme de echilibru. Pentru aceste clase de probleme se vor obtine rezultate de existenta a solutiei in diferite ipoteze si in raport cu diferite clase de functii, proprietati topologice ale multimii solutiilor si metode de scalarizare. Vor fi propuse metode de rezolvare, a caror convergenta va fi aratata, inclusiv prin exemple numerice.

De asemenea este natural sa se studieze comportarea acestor probleme la schimbarile datelor initiale. Acest tip de studiu se numeste analiza senzitiva. Analiza senzitiva este importanta din diferite motive. In primul rand, estimarea datelor problemei introduce adesea erori de masurare, analiza senzitiva ajuta la identificarea parametrilor importanti care trebuie obtinuti cu relativa acuratete. In al doilea rand, poate ajuta la predictia schimbarilor de echilibru ca rezultat al schimbarilor din sistemul principal. De asemenea, da informatii importante pentru proiectarea si planificarea unor sisteme de echilibru. Mai ales din punct de vedere matematic si ingineresc, analiza senzitiva poate

stimula noi idei si metode in rezolvarea problemelor. Datorita acestor motive, interesul pentru studiul analizei senzitive a inegalitatilor variationale si a problemelor de echilibru si optimizare matematica inrudite a crescut. Tehnicile discutate pana acum variaza in functie de problema practica.

Exista insa probleme de echilibru si inegalitati variationale ce nu pot fi rezolvate direct, una dintre cele mai utilizate metode fiind cautarea unei probleme de optimizare matematica echivalente. In consecinta, dezvoltarea teoriei matematice a optimului contribuie la diversificarea posibilitatilor de a obtine metode noi si mai performante de rezolvare a problemelor practice care de regula nu pot fi abordate cu metodele clasice. Noile contributii vizate asupra criteriilor de optimalitate pot facilita recunoasterea existentei solutiilor optime pentru clase largite de probleme practice. Extinderea rezultatelor de dualitate, prin noi constructii, sau prin generalizarea conditiilor impuse, contribuie la relevarea legaturilor dintre multimile solutiilor pentru probleme distincte, facand astfel posibila identificarea solutiilor optime ale unor astfel de probleme.

Caracterul interdisciplinar al acestui proiect contribuie la transferul unor idei conceptuale si a unor tehnici de demonstratie, marind speranta obtinerii unor rezultate consistente din punct de vedere matematic si viabile din punct de vedere aplicativ.